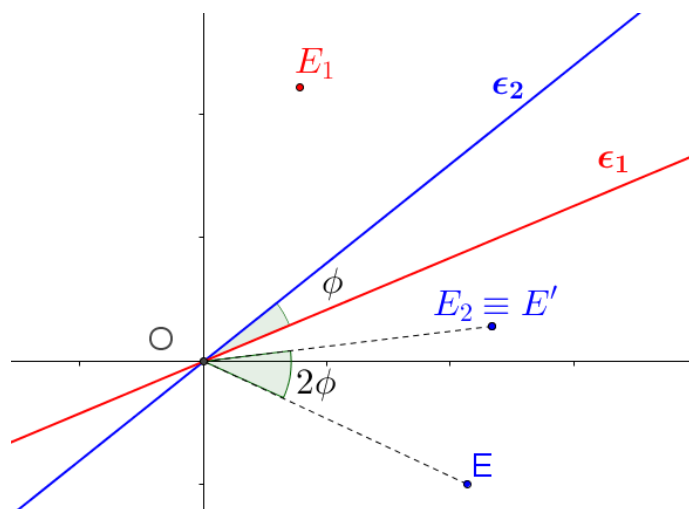


1 Δύο Ασκήσεις του Γ. Πολύζου

Λυγάτσικας Ζήνων

1.1 Οι ασκήσεις

- (sic) Έστω E ένα καρτεσιανό επίπεδο και ϵ_1, ϵ_2 δύο ευθείες αυτού, που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες θ_1 και θ_2 , αντιστοίχως, με $\theta_2 - \theta_1 = \phi \in (0, \pi)$. Έστω, επιπλέον $R_{\epsilon_1} : E \rightarrow E$ ο μετασχηματισμός, μέσω του οποίου κάθε σημείο του E απεικονίζεται στο συμμετρικό του ως προς την ευθεία ϵ_1 (αντανάκλαση ως προς την ευθεία ϵ_1) και $R_{\epsilon_2} : E \rightarrow E$ ο μετασχηματισμός, μέσω του οποίου κάθε σημείο του E απεικονίζεται στο συμμετρικό του ως προς την ευθεία ϵ_2 (αντανάκλαση ως προς την ευθεία ϵ_2).
- (α') Να αποδείξετε ότι η σύνθεση $R = R_{\epsilon_2} \circ R_{\epsilon_1}$ (ανάκλαση αρχικά ως προς την ευθεία ϵ_1 και στη συνέχεια ανάκλαση ως προς την ευθεία ϵ_2) συμπίπτει με τη στροφή $R_{O, 2\phi}$ γύρω από το O κατά γωνία 2ϕ .



Σχήμα 1: Η σύνθεση 2 ανακλάσεων είναι στροφή: $R = R_{\epsilon_2} \circ R_{\epsilon_1} = R_{O, 2\phi}$

- (β') Αν $R_n : E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι η ακολουθία μετασχηματισμών που ορίζεται ως εξής:

$$R_1 = R, R_2 = R \circ R, R_3 = R \circ R \circ R, R_n = \underbrace{R \circ R \circ R \circ \dots \circ R}_{n\text{-φορές}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

και αν $\phi = \frac{\pi}{15}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία η εικόνα $R_n(\epsilon)$, κάθε ευθείας ϵ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, συμπίπτει με την ευθεία ϵ .

Απόδειξη:

- (α') Το ερώτημα αναφέρεται σαν ένα **βασικό λήμμα** του Coxeter, δείτε H.S.M. Coxeter, *The Product of Three Reflections* (1946), το οποίο λέει ότι: *The product of reflections in two*

intersecting planes is easily seen to be a rotation about the line of intersection of the planes through twice the angle between them. Στο H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, 2nd ed., Wiley 1969, Κεφάλαιο 3, (Isometry in the Euclidean Plane, §3.2) ο Coxeter περιγράφει το ίδιο αποτέλεσμα αλλά αφορά τη περίπτωση όπου οι άξονες είναι παράλληλοι και λέει ότι: *The product of reflections in two parallel mirrors is a translation through twice the distance between the mirrors.* Μπορούμε να παραφράσουμε λοιπόν τις ερωτήσεις της άσκησης και σε άλλο περιβάλλον.

Η απάντηση του Μπάμπη Στεργίου¹ είναι πλήρης. Ο Στεργίου θεωρεί τους αντίστοιχους πίνακες των ανακλάσεων R_{ϵ_1} και R_{ϵ_2} :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta_1) & \sin(2\theta_1) \\ \sin(2\theta_1) & -\cos(2\theta_1) \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta_2) & \sin(2\theta_2) \\ \sin(2\theta_2) & -\cos(2\theta_2) \end{pmatrix}$$

Η σύνθεση αυτών των δύο:

$$M = M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{pmatrix}$$

είναι στροφή γύρω από το O με γωνία 2ϕ . Άρα, $R = R_{\epsilon_2} \circ R_{\epsilon_1} = R_{O,2\phi}$.

(β') Δίνεται $\phi = \frac{\pi}{15} = 12^\circ$. Από το προηγούμενο $R = R_{O,2\phi} = R_{O,\frac{2\pi}{15}}$. Άρα,

$$R_n = R_{O,n\frac{2\pi}{15}}$$

Μια στροφή γύρω από το O αφήνει σταθερή μια ευθεία που διέρχεται από το O , αν και μόνο αν η γωνία στροφής είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π , γιατί μια ευθεία χωρίς προσανατολισμό ταυτίζεται με τον εαυτό της όταν στρέφεται κατά π .

$$n\frac{2\pi}{15} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Τότε:

$$\frac{2n}{15} = k \Leftrightarrow n = \frac{15k}{2}$$

Επομένως, $k = 2$ και $n_{\min} = 15$.

Κάθε εφαρμογή του R στρέφει κατά $2\phi = 24^\circ$. Μετά από 15 εφαρμογές έχεις $15 \times 24^\circ = 360^\circ$, άρα κάθε σημείο και κάθε ευθεία με κέντρο το O επιστρέφει ακριβώς στη θέση της. ■

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε με τους μιγαδικούς αριθμούς. Η ερώτηση 1α' έχει ενδιαφέρον. Για το δεύτερο ερώτημα θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία της προηγούμενης απόδειξης, οπότε παραλείπουμε την επανάληψη.

(α') Από την Μιγαδική Ανάλυση γνωρίζουμε ότι αν $M(z)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = x + iy$, τότε η ανάκλαση του ως προς την ευθεία ϵ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία ϕ με τον πραγματικό άξονα, δίνεται από τον τύπο

$$R_\phi(z) = e^{2i\phi} \cdot \bar{z}$$

¹Δείτε Στεργίου, αρχές Ιουλίου 2026, ομάδα «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙ».

Άρα, οι ανακλάσεις ως προς τις δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι αντίστοιχα:

$$R_{\theta_1}(z) = e^{2i\theta_1} \cdot \bar{z}, \quad R_{\theta_2}(z) = e^{2i\theta_2} \cdot \bar{z}$$

Η σύνθεση αυτών των δύο είναι

$$\begin{aligned} R(z) &= R_{\theta_2}(R_{\theta_1}(z)) \\ &= R_{\theta_2}(e^{2i\theta_1} \cdot \bar{z}) \\ &= e^{2i\theta_2} \cdot \overline{e^{2i\theta_1} \cdot \bar{z}} \\ &= e^{2i\theta_2} \cdot e^{-2i\theta_1} \cdot z \\ &= e^{2i(\theta_2 - \theta_1)} \cdot z \\ &= e^{2i\phi} \cdot z \end{aligned}$$

Αλλά, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού με $e^{i\theta}$ αντιστοιχεί σε στροφή κατά θ . Επομένως,

$$\boxed{R = R_{O, 2\phi}}.$$

(β') Είναι η ίδια απάντηση όπως προηγουμένως. Καμία ουσιαστική αλλαγή. ■

2. (sic) Να βρείτε τις τιμές του $a \in (1, +\infty)$ για τις οποίες η ακολουθία

$$({}^n a) = \left(\underbrace{a^{a^{a^{a^{\dots}}}}}_{n-\text{φορές}} \right)$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του άπειρου πύργου $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}$ και του άπειρου πύργου $a^{a^{a^{a^{\dots}}}}$, για $a = e^{\frac{1}{e}}$.

Απόδειξη: Η άσκηση είναι ένα **θεμελιώδες αποτέλεσμα** αποδίδεται στον Euler (1783) και επιβεβαιώθηκε αργότερα από τον Eisenstein (1844), δείτε [OEIS A073243](#). Αποδεικνύεται ότι

$\boxed{e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}}$. Ο συγγραφέας της άσκησης δίνει όμως ένα εύλογο για μαθητές περιορισμό αυτού του ορίου, αφού $e^{-e} < 1$.

Η απόδειξη υπάρχει στο internet. Μπορείτε να ανατρέξετε στο [The On - Line Encyclopedia Of Integer Sequences - OEIS A073230](#). Αυτή η πηγή παρέχει το διάστημα σύγκλισης.

Μία ολοκληρωμένη παρουσίαση του προβλήματος θα βρείτε και στο [Wolfram MathWorld](#).

Για μια περισσότερο εμπειρισματομένη έρευνα δείτε: [Galidakis Y.: On an Application of Lambert's W Function to Infinite Exponentials](#).

Η απόδειξη που ακολουθήσαμε οφείλεται στον Euler. Εκεί, η απόδειξη ακολουθεί το παρακάτω σχήμα:

(α') Ξεκινά με την υπόθεση ότι το όριο b είναι πραγματικός αριθμός.

(β') Μετατρέπει το πρόβλημα στην εξίσωση $a = b^{1/b}$.

(γ') Βρίσκει το άνω όριο $e^{1/e}$ από το μέγιστο της $f(x) = x^{1/x}$.

(δ') Βρίσκει το κάτω όριο e^{-e} μελετώντας την περίπτωση όπου η ακολουθία ταλαντώνεται μεταξύ δύο τιμών και βρίσκοντας το όριο όπου αυτές οι δύο τιμές ταυτίζονται.

Ορίζω ακολουθία $b_1 = a$, $b_{n+1} = a^{b_n}$. Αν το όριο $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε από την αναδρομική σχέση προκύπτει ότι πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$b = a^b \text{ ή } a = b^{1/b}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$ η οποία παρουσιάζει μέγιστο. Πράγματι:

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\ln(x) = 1$ ή $x = e$, και $\max, f(e) = e^{1/e}$. Άρα, για να έχει λύση η εξίσωση $a = b^{1/b}$ πρέπει $\boxed{1 < a \leq e^{1/e} = 1.4446678...}$.

Για τον υπολογισμό του $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}$ = 2, δείτε στο [Infinite Power Tower](#).

Η τιμή της $a^{a^{a^{a^{\dots}}}}$ για $a = e^{\frac{1}{e}}$, υπολογίζεται ως εξής:

Όπως κάναμε στην απόδειξη του Euler, λόγω της αναδρομής ισχύει: $b = a^b$. Αν $a = e^{1/e}$, τότε

$$\begin{aligned} b = e^{b/e} &\Leftrightarrow \ln(b) = \frac{b}{e} \\ &\Leftrightarrow \ln(b) - \frac{b}{e} = 0 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση, $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$ μηδενίζεται στο $x = e$, αλλά η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = e$ και αριστερά και δεξιά του e αλλάζει πρόσημο, άρα η ρίζα $x = e$ είναι μοναδική. Συνεπώς:

$$e^{\frac{1}{e} e^{\frac{1}{e} e^{\frac{1}{e} \dots}}} = e$$

■