

Τρεις ευθείες Euler

Ζήνων Λυγάτσικας

28 Οκτωβρίου 2026

ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

© 2026 – Τρεις ευθείες Euler – Λυγάτσικας Ζήνων

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται, χωρίς προηγούμενη έγγραφη άδεια του δημιουργού, η ολική ή μερική αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, διανομή, μετάφραση, διασκευή ή εμπορική εκμετάλλευση του παρόντος έργου, με οποιοδήποτε μέσο ή τρόπο, έντυπο ή ηλεκτρονικό.

Η απαγόρευση αυτή ισχύει με την επιφύλαξη των εξαιρέσεων και περιορισμών που προβλέπει η εκάστοτε ισχύουσα νομοθεσία περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

All Rights Reserved

Στοιχειοθεσία L^AT_EX

Περιεχόμενα

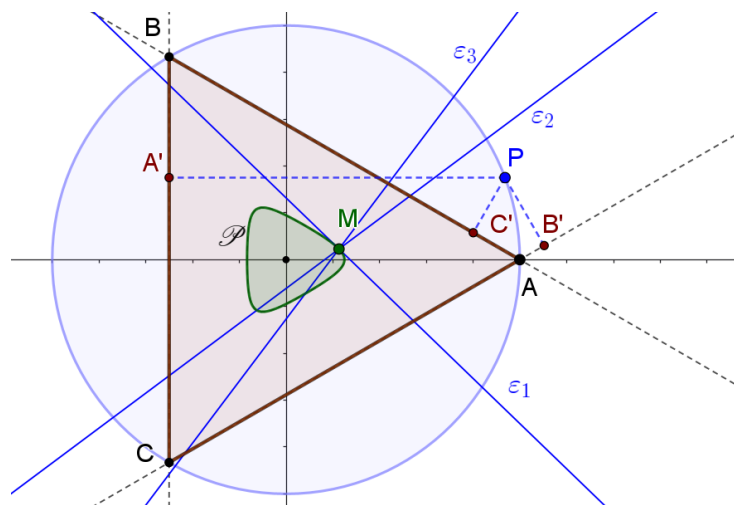
1	Οι τρεις συντρέχουσες ευθείες Euler	1
1.1	Το πρόβλημα:	1
1.2	Τι πρέπει να αποδείξουμε για τη τομή	1
1.3	Από τις τρεις ευθείες σε δύο απλές εξισώσεις	3
2	Ο Τόπος	7
2.1	Αποτέλεσμα	7
2.2	Η κατασκευή και οι συντεταγμένες	7
2.3	Εξίσωση της πρώτης ευθείας Euler	8
2.4	Πώς οι τρεις ευθείες δίνουν δύο απλές εξισώσεις	9
2.5	Το πολωνυμικό σύστημα και η απαλοιφή	10
2.6	Γιατί πρέπει να εξεταστεί ο πραγματικός τόπος	11
2.7	Το αλγεβρικό αντίστροφο	12
2.8	Ειδικά σημεία και ακριβής τόπος	12
2.8.1	Τα τρία απομονωμένα σημεία της αλγεβρικής καμπύλης	12
2.8.2	Οι έξι θέσεις όπου τα τρίγωνα εκφυλίζονται	13
2.8.3	Τι συμβαίνει αν προσθέσουμε τον μη εκφυλισμό στο ιδεώδες	14
2.9	Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει ακτίνα R	14
2.10	Τι λέει η γεωμετρική λύση	14
2.11	Η ακριβής σχέση ανάμεσα στο P και στον μικρό κύκλο	15
2.12	Γιατί οι δύο εξισώσεις φαίνονται διαφορετικές	16
2.13	Έλεγχος και της εξίσωσης του κύκλου	17
2.14	Τι γίνεται με τα απομονωμένα σημεία και τις εξαιρέσεις	17
2.15	Η Αξία του παραδείγματος	18

Κεφάλαιο 1

Οι τρεις συντρέχουσες ευθείες Euler

1.1 Το πρόβλημα:

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο P πάνω στη περιφέρεια και $A'B'C'$ η ευθεία Simson του P . Τότε, οι ευθείες του Euler των τριγώνων $AA'P$, $BB'P$ και $CC'P$ συντρέχουν. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους όταν το P κινείται στη περιφέρεια.



Σχῆμα 1.1: Ο γ.τ. του σημείου τομής των ευθειών Euler

1.2 Τι πρέπει να αποδείξουμε για τη τομή

Τρεις ευθείες συντρέχουν όταν περνούν από το ίδιο σημείο. Η τομή δύο ευθειών δεν αποδεικνύει ότι η τρίτη περνά από εκεί. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αυτό το πρόσθετο βήμα εξασφαλίζεται από τις αλγεβρικές ταυτότητες που ακολουθούν.

Με μεταφορά, στροφή και ομοιοθεσία μπορούμε να εργαστούμε με:

$$A = (1, 0), \quad B = (-1/2, \sqrt{3}/2), \quad C = (-1/2, -\sqrt{3}/2), \quad P = (u, v), \quad u^2 + v^2 = 1.$$

Ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει κέντρο $O = (0, 0)$ και ακτίνα 1. Θέτουμε

$$P = (u, v), \quad u^2 + v^2 = 1, \quad M = (x, y).$$

Οι βοηθητικές συντεταγμένες u, v περιγράφουν το σημείο της αρχικής κατασκευής, ενώ οι x, y το ζητούμενο σημείο. Επειδή η ευθεία BC έχει εξίσωση $x = -1/2$,

$$A' = \left(-\frac{1}{2}, v\right).$$

Οι υπόλοιπες προβολές είναι

$$B' = \left(\frac{3u + \sqrt{3}v + 1}{4}, \frac{v + \sqrt{3}u - \sqrt{3}}{4}\right), \quad C' = \left(\frac{3u - \sqrt{3}v + 1}{4}, \frac{v - \sqrt{3}u + \sqrt{3}}{4}\right).$$

Συμβολίζουμε με $L_A = 0, L_B = 0, L_C = 0$ τις εξισώσεις Euler των PAA', PBB', PCC' αντίστοιχα. Όπως υπολογίστηκε από το περίκεντρο K_A και το κέντρο βάρους G_A του PAA' ,

$$K_A = \left(\frac{2u - 1}{4}, \frac{(1 - u)(2u - 1)}{4v}\right), \quad G_A = \left(\frac{2u + 1}{6}, \frac{2v}{3}\right)$$

με $v \neq 0, u \neq -\frac{1}{2}$. Τότε:

$$\boxed{L_A = 2(1 - u)(2u + 11)x + 2v(2u - 5)y + (u - 1)(2u - 1)(2u + 3)} \quad (1.1)$$

Οι άλλες δύο προκύπτουν με τις αντίστοιχες στροφές κατά 120° και -120° και χρήση του $u^2 + v^2 = 1$.

$$\boxed{\begin{aligned} L_B = & \left(-4u^2 - 12u - 8 + 2\sqrt{3}v\right)x \\ & + \left(4uv - 16v + 2\sqrt{3}u + 10\sqrt{3}\right)y \\ & + 4u^3 - u + 3 - 2\sqrt{3}v \end{aligned}} \quad (1.2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_C = & \left(-4u^2 - 12u - 8 - 2\sqrt{3}v\right)x \\ & + \left(4uv - 16v - 2\sqrt{3}u - 10\sqrt{3}\right)y \\ & + 4u^3 - u + 3 + 2\sqrt{3}v \end{aligned}} \quad (1.3)$$

1.3 Από τις τρεις ευθείες σε δύο απλές εξισώσεις

Στις εκφράσεις (1.1), (1.2), (1.3) εμφανίζονται όροι με $\sqrt{3}$ και αντίθετα πρόσημα. Αυτό μας οδηγεί να εξετάσουμε τη διαφορά και το άθροισμά τους.

Με τις συγκεκριμένες εκφράσεις των L_B, L_C που χρησιμοποιήσαμε, βρίσκουμε

$$L_B - L_C = 4\sqrt{3}vx + 4\sqrt{3}(5+u)y - 4\sqrt{3}v.$$

Άρα

$$L_B - L_C = 4\sqrt{3}(vx + (5+u)y - v).$$

Η έκφραση μέσα στην αγκύλη θα ονομαστεί για τη συνέχεια

$$q_2 = vx + (5+u)y - v.$$

Επίσης,

$$\frac{L_B + L_C}{2} = (-4u^2 - 12u - 8)x + (4uv - 16v)y + 4u^3 - u + 3.$$

Επίσης, αναπτύσσοντας το L_A ,

$$L_A = (-4u^2 - 18u + 22)x + (4uv - 10v)y + 4u^3 - 7u + 3.$$

Αφαιρώντας, οι περισσότεροι όροι απλοποιούνται:

$$L_A - \frac{L_B + L_C}{2} = (30 - 6u)x + 6vy - 6u.$$

Δηλαδή

$$L_A - \frac{L_B + L_C}{2} = 6((5-u)x + vy - u)$$

Έστω για τη συνέχεια

$$q_1 = (5-u)x + vy - u$$

Επομένως, κάθε κοινό σημείο των τριών ευθειών ικανοποιεί αναγκαστικά

$$q_1 = q_2 = 0$$

Μέχρι εδώ έχουμε αποδείξει μόνο ότι ένα κοινό σημείο των τριών ευθειών λύνει το απλούστερο σύστημα. Χρειάζεται να ελέγξουμε και το αντίστροφο: αν $q_1 = q_2 = 0$, μηδενίζονται πράγματι τα L_A, L_B, L_C ;

Για αυτό αναζητούμε δύο συντελεστές α, β , που εξαρτώνται από τα u, v , ώστε

$$L_A = \alpha q_1 + \beta q_2.$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος:

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = (\alpha(5-u) + \beta v)x + (\alpha v + \beta(5+u))y - \alpha u - \beta v.$$

Συγκρίνουμε τους συντελεστές των x, y με εκείνους του L_A :

$$\begin{cases} (5-u)\alpha + v\beta = 2(1-u)(2u+11), \\ v\alpha + (5+u)\beta = 2v(2u-5). \end{cases}$$

Αυτό είναι ένα συνηθισμένο γραμμικό σύστημα. Η ορίζουσά του είναι

$$(5 - u)(5 + u) - v^2 = 25 - u^2 - v^2 = 24.$$

Λύνοντάς το, παίρνουμε

$$\alpha = \frac{2(1 - u)(5 + u)(2u + 11) - 2v^2(2u - 5)}{24} = (1 - u)(2u + 5),$$

όπου χρησιμοποίησαμε $v^2 = 1 - u^2$, και

$$\beta = \frac{2v(5 - u)(2u - 5) - 2v(1 - u)(2u + 11)}{24} = (2u - 3)v.$$

Απομένει να ελέγξουμε τον σταθερό όρο. Πράγματι,

$$\begin{aligned} -\alpha u - \beta v &= -u(1 - u)(2u + 5) - (2u - 3)v^2 \\ &= -(1 - u)(u(2u + 5) + (2u - 3)(1 + u)) \\ &= (u - 1)(2u - 1)(2u + 3), \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς ο σταθερός όρος του L_A .

Έτσι αποδεικνύεται ότι

$$L_A = (1 - u)(2u + 5)q_1 + (2u - 3)vq_2, \quad u^2 + v^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} L_A &= (1 - u)(2u + 5)q_1 + (2u - 3)vq_2, \\ L_B &= L_A - 6q_1 + 2\sqrt{3}q_2, \\ L_C &= L_A - 6q_1 - 2\sqrt{3}q_2 \end{aligned}$$

Τώρα, αν $q_1 = q_2 = 0$, η ταυτότητα δίνει $L_A = 0$. Επιπλέον, οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν

$$L_B - L_C = 0, \quad \frac{L_B + L_C}{2} = L_A = 0,$$

άρα $L_B = L_C = 0$.

Επομένως, υπό τη συνθήκη $u^2 + v^2 = 1$, τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα:

$$L_A = L_B = L_C = 0 \iff q_1 = q_2 = 0.$$

Αυτή η στοιχειώδης απλοποίηση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύο πολύ μικρότερα πολυώνυμα στον υπολογισμό της βάσης Gröbner.

Για να βρούμε το κοινό σημείο M , λύνουμε το σύστημα:

$$q_1 = q_2 = 0 \iff \begin{cases} (5 - u)x + vy = u, \\ vx + (5 + u)y = v \end{cases}$$

Η ορίζουσά του είναι

$$(5 - u)(5 + u) - v^2 = 25 - u^2 - v^2 = 24 \neq 0.$$

Άρα έχει μοναδική λύση

$$M = \left(\frac{2u^2 + 5u - 1}{24}, \frac{v(5 - 2u)}{24} \right).$$

■

Κεφάλαιο 2

Ο Τόπος

2.1 Αποτέλεσμα

Με περιγεγραμμένη ακτίνα ίση με 1 και με τις συντεταγμένες των σημείων που έχουμε ήδη ορίσει στην αρχή του προηγούμενου κεφαλαίου, η απαλοιφή δίνει

$$F(x, y) = 24(x^2 + y^2)^2 - 50x^3 + 150xy^2 + 27(x^2 + y^2) - 1$$

Για τις θέσεις όπου και τα τρία τρίγωνα έχουν ορισμένη ευθεία Euler, ο ακριβής τόπος είναι

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0, \quad \frac{1}{36} < x^2 + y^2 < \frac{1}{16} \right\}$$

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $F = 0$ περιέχει επιπλέον τα τρία απομονωμένα σημεία A, B, C . Η μικρή κλειστή καμπύλη που απομένει περιλαμβάνει έξι οριακές θέσεις, οι οποίες αποκλείονται αν απαιτούμε μη εκφυλισμένα τρίγωνα. Αν η κατασκευή επεκταθεί ρητά με όρια, αυτές οι έξι θέσεις προστίθενται.

2.2 Η κατασκευή και οι συντεταγμένες

Έστω ABC ισόπλευρο τρίγωνο, P σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου και A', B', C' οι ορθές προβολές του P στις ευθείες BC, CA, AB αντίστοιχα. Ζητείται ο τόπος του κοινού σημείου των ευθειών Euler των τριγώνων PAA', PBB', PCC' .

Με μεταφορά, στροφή και ομοιοθεσία επιλέγουμε

$$A = (1, 0), \quad B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το $O = (0, 0)$. Θέτουμε

$$P = (u, v), \quad u^2 + v^2 = 1, \quad M = (x, y)$$

Στη παράγραφο (1.2) είδαμε τις συντεταγμένες των προβολών του σημείου P στις πλευρές του τριγώνου. Επειδή η BC έχει εξίσωση $x = -1/2$,

$$A' = \left(-\frac{1}{2}, v\right)$$

και

$$B' = \left(\frac{3u + \sqrt{3}v + 1}{4}, \frac{v + \sqrt{3}u - \sqrt{3}}{4}\right)$$

$$C' = \left(\frac{3u - \sqrt{3}v + 1}{4}, \frac{v - \sqrt{3}u + \sqrt{3}}{4}\right)$$

2.3 Εξίσωση της πρώτης ευθείας Euler

Η ευθεία Euler ενός μη εκφυλισμένου, μη ισόπλευρου τριγώνου διέρχεται από το περίκεντρο και το κέντρο βάρους του. Για το τρίγωνο PAA' το κέντρο βάρους είναι

$$G_A = \left(\frac{2u + 1}{6}, \frac{2v}{3}\right)$$

Για το περίκεντρο $K_A = (h, k)$, από την ισότητα των αποστάσεων από τα P και A' , τα οποία έχουν την ίδια τεταγμένη, παίρνουμε

$$h = \frac{2u - 1}{4}$$

Η ισότητα των αποστάσεων από τα A και A' δίνει

$$3h - 2vk = \frac{3}{4} - v^2$$

Άρα, όπως έχουμε δει:

$$K_A = \left(\frac{2u - 1}{4}, \frac{2v^2 + 3u - 3}{4v}\right)$$

Στο σημείο αυτό θεωρούμε το τρίγωνο μη εκφυλισμένο, άρα $v \neq 0$ και $u \neq -1/2$. Οι εξαιρετικές θέσεις θα εξεταστούν χωριστά.

Η συνθήκη ότι τα M, G_A, K_A είναι συνευθειακά γράφεται με μηδενισμό της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (2u + 1)/6 & 2v/3 & 1 \\ (2u - 1)/4 & (2v^2 + 3u - 3)/(4v) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Απαλείφοντας τον μη μηδενικό παρονομαστή και χρησιμοποιώντας το $u^2 + v^2 = 1$, βρίσκουμε την ευθεία

$$L_A = 2(1 - u)(2u + 11)x + 2v(2u - 5)y + (u - 1)(2u - 1)(2u + 3) = 0$$

Τα G_A, K_A δεν συμπίπτουν στις επιτρεπτές πραγματικές θέσεις, αφού

$$(G_A)_x - (K_A)_x = \frac{5 - 2u}{12} > 0$$

Άρα η ευθεία Euler είναι πράγματι μοναδική. Το ίδιο ισχύει κυκλικά για τα άλλα δύο τρίγωνα.

2.4 Πώς οι τρεις ευθείες δίνουν δύο απλές εξισώσεις

Οι εξισώσεις $L_B = 0$ και $L_C = 0$ προκύπτουν από την $L_A = 0$ με αλλαγή σε ορθοκανονικά συστήματα στραμμένα κατά 120° και -120° . Για το σύστημα με πρώτο άξονα το OB χρησιμοποιούμε

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{-u + \sqrt{3}v}{2}, \frac{-\sqrt{3}u - v}{2} \right)$$

και την ίδια αντικατάσταση για τα (x, y) . Για το OC αλλάζουμε το πρόσημο του $\sqrt{3}$.

Με ανάπτυξη και χρήση του $u^2 + v^2 = 1$ παίρνουμε

$$L_B - L_C = 4\sqrt{3}(vx + (5 + u)y - v)$$

και

$$L_A - \frac{L_B + L_C}{2} = 6((5 - u)x + vy - u)$$

Επομένως κάθε κοινό σημείο των τριών ευθειών ικανοποιεί

$$\begin{cases} (5 - u)x + vy - u = 0, \\ vx + (5 + u)y - v = 0 \end{cases}$$

Ισχύει και το αντίστροφο. Αν συμβολίσουμε τα δύο αριστερά μέλη με p_2, p_3 τότε, πάνω στον κύκλο $u^2 + v^2 = 1$,

$$L_A = (1 - u)(2u + 5)p_2 + (2u - 3)p_3$$

Άρα $p_2 = p_3 = 0$ συνεπάγεται $L_A = 0$. Οι δύο προηγούμενες διαφορές δίνουν τότε και $L_B = L_C = 0$.

Η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος ως προς x, y είναι

$$(5 - u)(5 + u) - v^2 = 25 - u^2 - v^2 = 24$$

Συνεπώς οι τρεις ευθείες Euler συντρέχουν σε μοναδικό σημείο για κάθε επιτρεπτό P . Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται και η συνδρομή που αναφέρει η εκφώνηση.

2.5 Το πολυωνυμικό σύστημα και η απαλοιφή

Χρειαζόμαστε μόνο τα τρία πολυώνυμα

$$\begin{aligned} p_1 &= u^2 + v^2 - 1, \\ p_2 &= (5 - u)x + vy - u, \\ p_3 &= vx + (5 + u)y - v \end{aligned}$$

Θεωρούμε το ιδεώδες

$$J = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[u, v, x, y]$$

Υπολογίζοντας βάση Gröbner με λεξικογραφική διάταξη $u > v > x > y$ και κρατώντας τα πολυώνυμα που δεν περιέχουν u, v , βρίσκουμε

$$J \cap \mathbb{Q}[x, y] = \langle 24(x^2 + y^2)^2 - 50(x^3 - 3xy^2) + 27(x^2 + y^2) - 1 \rangle$$

Θέτω:

$$F(x, y) = 24(x^2 + y^2)^2 - 50(x^3 - 3xy^2) + 27(x^2 + y^2) - 1 \quad (2.1)$$

Αυτός είναι ο υπολογισμός απαλοιφής με βάση Gröbner. Στο Maple, αφού επικαλεστούμε το πακέτο `with(PolynomialIdeals)`, γράφεται:

```
p1 := u^2 + v^2 - 1
p2 := (5 - u)x + vy - u
p3 := vx + (5 + u)y - v
J := PolynomialIdeal([p1, p2, p3], variables = {u, v, x, y})
E := EliminationIdeal(J, {x, y})
Generators(E)
```

Το σύνολο $\{x, y\}$ περιέχει τις μεταβλητές που διατηρούμε, επομένως απαλείφονται τα u, v .

Ο γεννήτορας μπορεί να εμφανιστεί αναπτυγμένος, ή πολλαπλασιασμένος με μη μηδενική σταθερά. Αυτές οι μορφές παράγουν το ίδιο ιδεώδες.

2.6 Γιατί πρέπει να εξεταστεί ο πραγματικός τόπος

Μπορούμε να αντλήσουμε μια πρώτη πληροφορία απευθείας από το πολυώνυμο της απαλοιφής. Θέτουμε τις συντομογραφίες

$$s = x^2 + y^2, \quad t = x^3 - 3xy^2$$

Πρόκειται για εκφράσεις των x, y , όχι για παραμετρική περιγραφή της καμπύλης. Ισχύει η ταυτότητα

$$s^3 - t^2 = y^2(3x^2 - y^2)^2 \geq 0$$

Από την $F = 0$ παίρνουμε

$$50t = 24s^2 + 27s - 1$$

Άρα

$$(24s^2 + 27s - 1)^2 \leq 2500s^3.$$

Η διαφορά παραγοντοποιείται ως εξής:

$$(24s^2 + 27s - 1)^2 - 2500s^3 = (s - 1)^2(16s - 1)(36s - 1)$$

Επομένως κάθε πραγματικό σημείο της $F = 0$ ικανοποιεί

$$(s - 1)^2(16s - 1)(36s - 1) \leq 0$$

Αν $s \neq 1$, ο παράγοντας $(s - 1)^2$ είναι θετικός, οπότε

$$(16s - 1)(36s - 1) \leq 0$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\frac{1}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{16} \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Έτσι τα πραγματικά σημεία της εξίσωσης βρίσκονται είτε στη ζώνη μεταξύ των κύκλων ακτίνων $1/6$ και $1/4$, είτε στον μοναδιαίο κύκλο. Θα εξετάσουμε χωριστά αυτές τις δύο περιπτώσεις.

2.7 Το αλγεβρικό αντίστροφο

Θέλουμε τώρα να ελέγξουμε αν κάθε πραγματικό σημείο της τεταρτοβάθμιας μέσα σε αυτή τη ζώνη παράγεται από πραγματικό P .

Αν $s = x^2 + y^2 \neq 1$, το σύστημα $p_2 = p_3 = 0$, ως προς u, v , έχει μοναδική λύση

$$u = \frac{5(x - x^2 + y^2)}{1 - x^2 - y^2}, \quad v = \frac{5y(2x + 1)}{1 - x^2 - y^2}$$

Οι δύο αριθμοί είναι πραγματικοί για πραγματικά x, y . Με αντικατάσταση,

$$u^2 + v^2 - 1 = \frac{F(x, y)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Επομένως, αν $F(x, y) = 0$ και $s \neq 1$, η αντίστοιχη λύση $P = (u, v)$ βρίσκεται στον πραγματικό μοναδιαίο κύκλο. Εφόσον τα τρίγωνα δεν εκφυλίζονται, η παράγραφος (2.4) εξασφαλίζει ότι το M είναι το ζητούμενο κοινό σημείο.

Αυτό αποδεικνύει την επάρκεια χωρίς παραμετρική περιγραφή της καμπύλης.

2.8 Ειδικά σημεία και ακριβής τόπος

2.8.1 Τα τρία απομονωμένα σημεία της αλγεβρικής καμπύλης

Η περίπτωση $s = 1$, στην οποία δεν επιτρέπεται η προηγούμενη διαίρεση, εξετάζεται χωριστά. Τότε η $F = 0$ γίνεται

$$x^3 - 3xy^2 = 1$$

Με $y^2 = 1 - x^2$ παίρνουμε

$$4x^3 - 3x - 1 = (x - 1)(2x + 1)^2 = 0$$

Άρα τα σημεία της $F = 0$ με $s = 1$ είναι ακριβώς

$$A = (1, 0), \quad B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Τα A, B, C ανήκουν στην πραγματική αλγεβρική καμπύλη $F = 0$, αλλά δεν ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο. Όλα τα υπόλοιπα πραγματικά σημεία της $F = 0$, από το αντίστροφο και την προηγούμενη εκτίμηση, έχουν $OM \leq 1/4$. Επειδή $OA = OB = OC = 1$, τα A, B, C είναι απομονωμένα πραγματικά σημεία της καμπύλης.

Η προέλευσή τους στο πολυωνυμικό σύστημα φαίνεται άμεσα. Για $M = A = (1, 0)$, οι εξισώσεις $p_2 = p_3 = 0$ επιβάλλουν $u = 5/2$ και δεν προσδιορίζουν το v . Η εξίσωση $p_1 = 0$ δίνει

$$v^2 = -\frac{21}{4}, \quad v = \pm \frac{i\sqrt{21}}{2}$$

Το πραγματικό σημείο A προκύπτει από μιγαδικές βοηθητικές λύσεις, όχι από πραγματική θέση του P . Το ίδιο συμβαίνει για τα B, C λόγω συμμετρίας.

2.8.2 Οι έξι θέσεις όπου τα τρίγωνα εκφυλίζονται

Τα $P = (u, v)$ και $A' = (-1/2, v)$ βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία. Το τρίγωνο PAA' εκφυλίζεται όταν

$$v \left(u + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Στον μοναδιαίο κύκλο αυτό συμβαίνει για $P = A, -A, B, C$. Εξετάζοντας κυκλικά και τα άλλα δύο τρίγωνα, βρίσκουμε ότι πρέπει να αποκλειστούν συνολικά οι έξι θέσεις

$$P \in \{A, B, C, -A, -B, -C\}.$$

Πάνω στον κύκλο η συνθήκη μη εκφυλισμού και των τριών τριγώνων γράφεται συνοπτικά

$$\boxed{v(4u^2 - 1) \neq 0}$$

Οι έξι αντίστοιχες οριακές θέσεις του M είναι

$$\frac{A}{4}, \quad \frac{B}{4}, \quad \frac{C}{4}, \quad -\frac{A}{6}, \quad -\frac{B}{6}, \quad -\frac{C}{6}$$

δηλαδή

$$\left(\frac{1}{4}, 0 \right), \quad \left(-\frac{1}{8}, \pm \frac{\sqrt{3}}{8} \right), \quad \left(-\frac{1}{6}, 0 \right), \quad \left(\frac{1}{12}, \pm \frac{\sqrt{3}}{12} \right)$$

Δεν παράγονται ξανά από άλλη, επιτρεπτή θέση του P , επειδή το αντίστροφο της παραγράφου (2.7) δίνει μοναδικό P .

Οι τρεις πρώτες έχουν $OM = 1/4$ και οι τρεις τελευταίες $OM = 1/6$. Από τις παραγοντοποιήσεις της παραγράφου 5 προκύπτει ότι αυτές είναι όλες οι περιπτώσεις ισότητας στα δύο άκρα.

Συνεπώς, για τη συνήθη έννοια της ευθείας Euler μη εκφυλισμένου τριγώνου,

$$\boxed{\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0, \quad 1/36 < x^2 + y^2 < 1/16\}}$$

Αν συμφωνήσουμε ρητά να προσθέσουμε τις οριακές θέσεις της κατασκευής, ο τόπος γίνεται η μικρή κλειστή καμπύλη

$$F(x, y) = 0, \quad 1/36 \leq x^2 + y^2 \leq 1/16$$

Τα τρία απομονωμένα σημεία A, B, C εξακολουθούν να αποκλείονται.

2.8.3 Τι συμβαίνει αν προσθέσουμε τον μη εκφυλισμό στο ιδεώδες

Μπορούμε να προσθέσουμε βοηθητική μεταβλητή z και την εξίσωση

$$z v(4u^2 - 1) - 1 = 0$$

Με αυτόν τον τρόπο αποκλείονται από τις λύσεις του διευρυμένου συστήματος οι έξι εκφυλισμένες πραγματικές θέσεις του P . Ωστόσο, η απαλοιφή των $\{z, u, v\}$ εξακολουθεί να δίνει το ίδιο ιδεώδες $\langle F \rangle$. Αυτό επαληθεύτηκε με συστήματα συμβολικού υπολογισμού.

Οι εξισώσεις της απαλοιφής δεν μπορούν να καταγράψουν μόνες τους την αφαίρεση αυτών των έξι οριακών σημείων από την καμπύλη. Επίσης, τα A, B, C εξακολουθούν να έχουν επιτρεπτές μιγαδικές βοηθητικές λύσεις. Η προσθήκη της μη μηδενικότητας δεν μετατρέπει τον υπολογισμό σε έλεγχο ύπαρξης στο $\mathbb{R}$.

2.9 Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει ακτίνα R

Με $O = (0, 0)$, $A = (R, 0)$ και τις άλλες κορυφές στις αντίστοιχες θέσεις, η εξίσωση είναι

$$24(x^2 + y^2)^2 - 50\rho(x^3 - 3xy^2) + 27R^2(x^2 + y^2) - R^4 = 0$$

Οι ακριβείς περιορισμοί για μη εκφυλισμένα τρίγωνα είναι

$$\frac{R^2}{36} < x^2 + y^2 < \frac{R^2}{16}$$

■

2.10 Τι λέει η γεωμετρική λύση

Η λύση του García Capitán¹ λέει ότι είναι η εικόνα ενός κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $1/5$ μέσω ισοτομικής ή ισογώνιας συζυγίας ως προς το ABC .

¹Problem 231, proposed by Antreas Hatzipolakis, with a solution by Francisco Javier García Capitán, dated October 23, 2026.

Για σημείο T , η ισογώνια συζυγής του κατασκευάζεται ανακλώντας τις ευθείες AT, BT, CT στις αντίστοιχες διχοτόμους. Οι τρεις ανακλώμενες ευθείες συντρέχουν σε ένα σημείο, το ισογώνιο συζυγές του T . Αυτός ο μετασχηματισμός δεν διατηρεί γενικά τους κύκλους.

Στο ισόπλευρο τρίγωνο η ισογώνια και η ισοτομική συζυγία συμπίπτουν. Σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες και με μη μηδενικές συντεταγμένες σημείου γράφονται

$$(\alpha : \beta : \gamma) \longmapsto (1/\alpha : 1/\beta : 1/\gamma) = (\beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta)$$

Για γενικό τρίγωνο οι δύο συζυγίες διαφέρουν: η ισογώνια έχει τύπο $(a^2/\alpha : b^2/\beta : c^2/\gamma)$, ενώ η ισοτομική $(1/\alpha : 1/\beta : 1/\gamma)$. Εδώ $a = b = c$.

Ο γεωμετρικός ορισμός των δύο μετασχηματισμών υπάρχει στο [Glossary Encyclopedia of Triangle Centers]

<https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/Glossary.html>

Η συγκεκριμένη αναγνώριση της καμπύλης αποδίδεται στη λύση του García Capitán.

2.11 Η ακριβής σχέση ανάμεσα στο P και στον μικρό κύκλο

Θέτουμε

$$T = \left(-\frac{u}{5}, -\frac{v}{5}\right)$$

Δηλαδή $\overrightarrow{OT} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OP}$. Το T βρίσκεται στην αντίθετη ημιευθεία από το P , σε απόσταση $OP/5$ από το O . Εφόσον $u^2 + v^2 = 1$,

$$OT^2 = \frac{1}{25}$$

Καθώς το P κινείται στον μοναδιαίο κύκλο, το T κινείται στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας $1/5$.

Οι κανονικοποιημένες βαρυκεντρικές συντεταγμένες του T είναι

$$\alpha_T = \frac{5-2u}{15}, \quad \beta_T = \frac{5+u-\sqrt{3}v}{15}, \quad \gamma_T = \frac{5+u+\sqrt{3}v}{15}$$

Αν πάρουμε τις αντίστροφές τους και επιστρέψουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η ισογώνια συζυγής του T έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{u^2 - v^2 + 5u}{25 - u^2 - v^2}, \frac{v(5 - 2u)}{25 - u^2 - v^2}\right)$$

Με $u^2 + v^2 = 1$ αυτές γίνονται ακριβώς

$$\left(\frac{2u^2 + 5u - 1}{24}, \frac{v(5 - 2u)}{24} \right) = M$$

Συνεπώς

$$M = \iota(T) = \iota(-P/5)$$

όπου ι συμβολίζει την ισογώνια συζυγία ως προς ABC .

2.12 Γιατί οι δύο εξισώσεις φαίνονται διαφορετικές

Στη λύση García Capitán τα x, y, z είναι ομογενείς συντεταγμένες ως προς το τρίγωνο. Για το ισόπλευρο, οι συνήθεις βαρυκεντρικές και τριγραμμικές ομογενείς συντεταγμένες συμπίπτουν έως κοινό παράγοντα. Δεν πρόκειται για τις δύο καρτεσιανές συντεταγμένες που χρησιμοποιήσαμε εμείς.

Για να αποφύγουμε τη σύγχυση, ονομάζουμε τις βαρυκεντρικές α, β, γ . Η εξίσωση της εικόνας είναι

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = 8(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) - 9\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

Για ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) , οι κανονικοποιημένες βαρυκεντρικές, με $\alpha + \beta + \gamma = 1$, είναι

$$\alpha = \frac{1 + 2x}{3}, \quad \beta = \frac{1 - x + \sqrt{3}y}{3}, \quad \gamma = \frac{1 - x - \sqrt{3}y}{3}$$

Η άμεση αντικατάσταση δίνει την ακριβή ταυτότητα

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{27} (24(x^2 + y^2)^2 - 50x^3 + 150xy^2 + 27(x^2 + y^2) - 1)$$

Το μη μηδενικό σταθερό πολλαπλάσιο $1/27$ δεν αλλάζει το σύνολο μηδενισμού. Άρα οι δύο εξισώσεις περιγράφουν ακριβώς την ίδια αλγεβρική καμπύλη.

Για να ελεγχθεί η αντικατάσταση χωρίς μεγάλη ανάπτυξη, θέτουμε $s = x^2 + y^2$ και $t = x^3 - 3xy^2$. Τότε

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1 - s}{3}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{1 - 3s + 2t}{27}$$

Επειδή

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma$$

έχουμε

$$H = \frac{8(1-s)^2}{9} - \frac{25(1-3s+2t)}{27} = \frac{24s^2 + 27s - 50t - 1}{27}$$

2.13 Έλεγχος και της εξίσωσης του κύκλου

Η εξίσωση του μικρού κύκλου στο Σχήμα (1.1) είναι

$$8(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 9(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0$$

Με την ίδια αλλαγή συντεταγμένων παίρνουμε

$$\frac{25(x^2 + y^2) - 1}{3} = 0,$$

δηλαδή

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{25}$$

Άρα και η αναφερόμενη ακτίνα $1/5$ συμφωνεί ακριβώς.

Η ισογώνια συζυγία δίνει τη βαρυκεντρική τεταρτοβάθμια αντικαθιστώντας στον κύκλο

$$\alpha \mapsto 1/\alpha, \quad \beta \mapsto 1/\beta, \quad \gamma \mapsto 1/\gamma$$

και πολλαπλασιάζοντας με $\alpha^2\beta^2\gamma^2$. Το αποτέλεσμα είναι το $H = 0$.

2.14 Τι γίνεται με τα απομονωμένα σημεία και τις εξαιρέσεις

Η συμφωνία των εξισώσεων δεν ακυρώνει τις προηγούμενες παρατηρήσεις για τον ακριβή πραγματικό τόπο.

Ο μικρός κύκλος ακτίνας $1/5$ βρίσκεται ολόκληρος στο εσωτερικό του ισόπλευρου, αφού η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι $1/2$. Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες των σημείων του είναι θετικές, άρα η ισογώνια εικόνα του είναι καλά ορισμένη και δεν περιλαμβάνει τις κορυφές A, B, C .

Ωστόσο, η εξίσωση $H = 0$ μηδενίζεται και στις κορυφές $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$. Η απαλοιφή των παρονομαστών έδωσε μια πολυωνυμική εξίσωση που περιλαμβάνει και αυτά τα σημεία, παρότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν ορίζεται εκεί.

Πρόκειται ακριβώς για τα τρία απομονωμένα πραγματικά σημεία της $F = 0$ που εντοπίσαμε.

Η ισογώνια εικόνα ολόκληρου του μικρού κύκλου είναι η μικρή κλειστή καμπύλη

$$F = 0, \quad 1/36 \leq x^2 + y^2 \leq 1/16$$

Αν απαιτούμε να ορίζονται και τα τρία αρχικά τρίγωνα, αφαιρούνται επιπλέον οι έξι οριακές θέσεις που αντιστοιχούν σε $P = \pm A, \pm B, \pm C$. Τότε

$$F = 0, \quad 1/36 < x^2 + y^2 < 1/16.$$

Η σύντομη συνημμένη λύση αναγνωρίζει την κλειστή καμπύλη και δεν συζητά αυτές τις εκφυλισμένες αρχικές θέσεις.

Η εξίσωση που προκύπτει με απαλοιφή συμφωνεί με τη γεωμετρική περιγραφή της λύσης του García Capitan: ο τόπος είναι η ισογώνια, ή ισοτομική, εικόνα του κύκλου κέντρου O και ακτίνας $R/5$, όπου R είναι η περιγεγραμμένη ακτίνα του ισόπλευρου. Συγκεκριμένα, στο σημείο P αντιστοιχεί το κοινό σημείο Euler $M = \iota(T)$, με $\overrightarrow{OT} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OP}$. Η πολωνυμική εξίσωση της εικόνας περιέχει επιπλέον τις τρεις κορυφές ως απομονωμένα πραγματικά σημεία. Για την αρχική κατασκευή μη εκφυλισμένων τριγώνων εξαιρούνται επίσης έξι οριακές θέσεις της μικρής κλειστής καμπύλης.

2.15 Η Αξία του παραδείγματος

Το παράδειγμα συνδέει μια γεωμετρική κατασκευή με ένα μικρό πολωνυμικό σύστημα, η συνδρομή του οποίου συνίσταται στον υπολογισμό μιας μη τετριμμένης τεταρτοβάθμιας και στον πλήρη αλγεβρικό έλεγχο του αντιστρόφου.

Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι ότι εμφανίζει δύο διαφορετικές αιτίες αποκλεισμού σημείων: έξι οριακές θέσεις εκφυλισμένων τριγώνων και τρία απομονωμένα πραγματικά σημεία που παράγονται μόνο από μιγαδικά βοηθητικά δεδομένα.